LEZIONI ED ESERCITAZIONI DI MATEMATICA

Prof. Francesco Marchi [1]

Appunti ed esercizi su:

Logaritmi ed esponenziali per classe 4C: esercitazione per la verifica

31 gennaio 2012

[1] Per altri materiali didattici o per informazioni:

Blog personale: http://francescomarchi.wordpress.com/
Indirizzo email: fra.marchi@yahoo.it

Capitolo 1

Equazioni e disequazioni

1.1 Equazioni esponenziali

I seguenti esercizi sono tratti da [?], vol. 3, pag. 47 e segg.

1.1.1 Nella forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ o ad essa riconducibili tramite proprietà dell'esponenziale

$$92^x = 1 \tag{1.1}$$

$$\frac{\sqrt{4^{x-2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = 16 \tag{1.2}$$

$$4^{3-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} \tag{1.3}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{36}{25}}\right)^x = \frac{125}{216} \tag{1.4}$$

$$(7^x)^{1-x} = \frac{7}{7^x} \tag{1.5}$$

$$\left(3^{x+1}\right)^{x-1} = 27 \tag{1.6}$$

1.1.2 Risolubili con considerazioni qualitative

$$5^x = -7 \tag{1.7}$$

$$11^{1-8x} = 0 \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{25}{36}\right)^{x-5} = -2 \tag{1.9}$$

$$\frac{8^{x-3}\sqrt[3]{121^x}}{\left(32^{1+x}\right)^3} = 1 - \log 11 \tag{1.10}$$

1.1.3 Risolubili tramite logaritmi

$$4^{2-x} = 3^{3x} \tag{1.11}$$

$$7^x = 23 \tag{1.12}$$

$$3^{x-1} = 5^{x+2} \tag{1.13}$$

1.2 Equazioni logaritmiche

$$\log_4 x = 2 \tag{1.14}$$

$$\log_9 x = -1 \tag{1.15}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x = -2 \tag{1.16}$$

$$\log_{\frac{4}{5}} x = \frac{1}{2} \tag{1.17}$$

$$\log_{\sqrt{2}} x = 3 \tag{1.18}$$

$$\log_2(x^2 + 4) = 3 \tag{1.19}$$

$$\log_2\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) = 3 \tag{1.20}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} \tag{1.21}$$

$$\log_6 x = -\frac{1}{2} \tag{1.22}$$

$$\log_{\sqrt{3}} x = \frac{3}{2} \tag{1.23}$$

$$\log_x 81 = 4 \tag{1.24}$$

$$\log_x \frac{16}{9} = 2 \tag{1.25}$$

$$\log_x \frac{1}{8} = -3 \tag{1.26}$$

$$\log_x \sqrt[5]{8} = \frac{3}{5} \tag{1.27}$$

$$\ln(x^2 + 1) = 2 \tag{1.28}$$

1.2.1 Risolubili tramite l'applicazione di formule

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) = -1 \tag{1.29}$$

$$\log(x - 5) + \log(x - 3) = 0 \tag{1.30}$$

$$3 \ln x + \ln(9 - 8x^3) = 0 \tag{1.31}$$

$$2 \log_3 x + \log_3(2x^2 + 1) = 1 \tag{1.32}$$

$$2 + \log_2 x^4 = \log_2 9 + \log_2 x^2 \tag{1.33}$$

$$\log(1 - x) - \log(2x + 4) = \log 5 \tag{1.34}$$

1.3 Esercizi vari

Esercizio 1. Soluzione di equazioni esponenziali

Risolvi le seguenti equazioni seguenti.

$$92^x = 1 \tag{1.35}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{36}{25}}\right)^x = \frac{125}{216} \tag{1.36}$$

$$\left(3^{x+1}\right)^{x-1} = 27 \tag{1.37}$$

$$5^x = -7 \tag{1.38}$$

$$\sqrt[x+3]{4^x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[x]{\frac{1}{2^{1-x}}} \tag{1.39}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5^x \cdot 5^{2-x}}}{\sqrt{5^{x+1}}} = 25\sqrt[3]{5} \tag{1.40}$$

$$\frac{8^{x-3} \cdot \sqrt[3]{121^x}}{\left(32^{1+x}\right)^3} = 1 - \log 11 \tag{1.41}$$

$$\frac{\sqrt{4^{x-2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^x} = 16 \tag{1.42}$$

$$4^{3-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} \tag{1.43}$$

$$(7^x)^{1-x} = \frac{7}{7^x} \tag{1.44}$$

$$\left(\frac{25}{36}\right)^{x-5} = -2 \tag{1.45}$$

$$11^{1-8x} = 0 \tag{1.46}$$

$$\sqrt{3^{2x-1}} \cdot 9^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} \tag{1.47}$$

$$4^{\frac{x-1}{x+2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{x^2-4}}} \tag{1.48}$$

$$\frac{\sqrt[x]{3^2}}{81 \cdot \sqrt{9^x}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}}{\sqrt[2x]{27}} \cdot 3^{x+2} = 3^x \tag{1.49}$$

$$3 \ln x + \ln(9 - 8x^3) = 0 \tag{1.50}$$

$$e^{x+\frac{\pi}{4}} - 2 = 3 \tag{1.51}$$

$$2^{x+6} + 4 = 1 \tag{1.52}$$

$$14^{2x+3} = 9^{1-x} \tag{1.53}$$

$$2 \log_x \frac{8}{3} - 5 = 1 \tag{1.54}$$

Capitolo 2

Dimostrazioni

2.1 Funzioni esponenziali

2.1.1 Definizioni e fatti fondamentali

Definizione 1. *Si definisce **potenza n-sima** di un numero a il prodotto di a per se stesso effettuato n volte, ossia:*

$$a^n \doteq \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\, volte} \tag{2.1}$$

E' chiaro che dalla definizione precedente non è possibile dare un significato ad espressioni come a^0, a^{-2}, $a^{\frac{3}{25}}$: che senso avrebbe moltiplicare un numero per se stesso zero volte? o meno due volte?
Vedremo come dare un senso alle scritture precedenti.
Innanzitutto diciamo che, per definizione, vale:

$$a^0 \doteq 1$$

Consideriamo ora la seguente moltiplicazione:

$$a^m \cdot a^n \overset{2.1}{=} \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\, volte} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{m\, volte} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n+m\, volte} \overset{2.1}{=} a^{n+m}$$

Consideriamo adesso la seguente moltiplicazione:

$$a^n \cdot a^{-n} \overset{3.1b}{=} a^{n-n} = a^0 \overset{3.1a}{=} 1$$

Considerando il primo e l'ultimo membro, ricaviamo che:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Veniamo adesso al rapporto tra potenze:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} \overset{3.1g}{=} a^n \cdot a^{-m} \overset{3.1b}{=} a^{n-m}$$

Esercizio O3. Dimostrazione di formule

Dimostra le uguaglianze proposte negli esercizi seguenti, facendo riferimento alle proprietà dell'esponenziale. In particolare, scrivi e numera le proprietà che via via utilizzi; giustifica ogni passaggio facendo riferimento al numero della proprietà utilizzata. In ogni passaggio, puoi usare al massimo una proprietà, anche "in più punti" dell'espressione.
Per chiarire le cose, guarda il seguente esempio svolto.

Esempio svolto (in parte)

Dimostrare che:

$$3^2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt[7]{3^2} = \frac{1}{3^{-51/7}}$$

Proprietà delle potenze utilizzate

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \tag{2.2a}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{2.2b}$$

Dimostrazione.

$$3^2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt[7]{3^2} \overset{3.1f}{=} 3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^{2/7} \overset{3.1b}{=} 3^{51/7} \overset{...}{=} \frac{1}{3^{-51/7}}$$

□

Esercizi da svolgere

Dimostrare, in modo analogo all'esempio svolto sopra, le seguenti uguaglianze.

$$(\sqrt[3]{25^x} \cdot \sqrt{5^x})^6 : \frac{5^{5x-2}}{25} = 5^{2x+4}$$

$$\frac{(2^{1-x-x^2} : \sqrt{2^x})^4}{(2^{2-x})^{2+x}} = 2^{5x^2-6x}$$

$$(\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}}) : \sqrt[6]{2^x} = 2^{\frac{2x+1}{3}}$$

2.2 Dimostrazione di identità

Dimostrare le uguaglianze proposte negli esercizi seguenti, facendo riferimento alle formule riportate nell'appendice 3, come negli esempi svolti.

2.2.1 Funzione esponenziale

Esercizio 1 (esempio svolto)

Dimostrare che:

$$3^2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt[7]{3^2} = \frac{1}{3^{-51/7}}$$

Dimostrazione.

$$3^2 \cdot 3^5 \cdot \sqrt[7]{3^2} \overset{3.1f}{=} 3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^{2/7} \overset{3.1b}{=} 3^{51/7} \overset{3.1g}{=} \frac{1}{3^{-51/7}}$$

□

Esercizio 2

Come esercizio, si possono considerare gli esercizi 18-30 pag. 614 di [**?**], considerando come punto di arrivo il risultato proposto di fianco. Qui di seguito, riportiamo alcune identità riprese da tale testo.

$$(\sqrt[3]{25^x} \cdot \sqrt{5^x})^6 : \frac{5^{5x-2}}{25} = 5^{2x+4}$$

$$\frac{(2^{1-x-x^2} : \sqrt{2^x})^4}{(2^{2-x})^{2+x}} = 2^{5x^2-6x}$$

$$(\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}}) : \sqrt[6]{2^x} = 2^{\frac{2x+1}{3}}$$

2.2.2 Funzione logaritmica

Esercizio 1 (esempio svolto)

Dimostrare che vale:

$$\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{7}{6}$$

Dimostrazione.

$$\log_3 \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}} \overset{3.1f}{=} \log_3 \frac{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} \overset{3.1b}{=} \log_3 \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}}$$

$$\overset{3.1c}{=} \log_3 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = \log_3 3^{\frac{7}{6}}$$

$$\overset{3.2c}{=} \frac{7}{6} \log_3 3 \overset{3.2f}{=} \frac{7}{6}$$

□

Esercizio 2

Come esercizio, si possono considerare gli esercizi 4-8 pag. 656 di [**?**] e 92-99 pag. 661, considerando come punto di arrivo il risultato proposto di fianco. Qui di seguito, riportiamo alcune identità riprese da tale testo.

$$\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_5 \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{7}{6}$$

$$1 + \log\sqrt{10} - \frac{1}{3}\log 10 - \log\sqrt[6]{10} = \log 10$$

$$\log(x-y) + \log(x+y) - \log(x^2 - 2xy + y^2) = \log\frac{x+y}{x-y}$$

Capitolo 3

Formulario

3.1 Funzioni esponenziali

3.1.1 Proprietà delle potenze

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \tag{3.1a}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{3.1b}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{3.1c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{3.1d}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \tag{3.1e}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \tag{3.1f}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{3.1g}$$

$$a^{\log_a x} = x \tag{3.1h}$$

3.2 Funzioni logaritmiche

3.2.1 Proprietà dei logaritmi

Laddove non è indicata esplicitamente la base, è inteso che la proprietà vale qualsiasi sia la base.

$$\log(xy) = \log x + \log y \tag{3.2a}$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \tag{3.2b}$$

$$\log x^n = n \log x \tag{3.2c}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \tag{3.2d}$$

$$\log_a a^x = x \tag{3.2e}$$

$$\log_a a = 1 \tag{3.2f}$$